Numération : entiers négatifs, décimaux et encodage en machine	1 NSI

Table des matières

1. Introduction

Il ne faut jamais sous-estimer les risques d'erreur liés à la manipulation de variables entières ou flottantes.

Des débordements ou des problèmes de précision peuvent survenir à tout moment et déjouer la vigilance de n'importe quel développeur, même expérimenté.

Le vol 501 est le vol inaugural du lanceur européen Ariane 5, qui a eu lieu le 4 juin 1996. Il s'est soldé par un échec, causé par un dysfonctionnement informatique (appelé aussi bug), qui vit la fusée se briser et exploser en vol seulement 36,7 secondes après le décollage.

La fusée a explosé à une altitude de 4 000 mètres au-dessus du centre spatial de Kourou, en Guyane. Il n'y a eu aucune victime, les débris étant retombés relativement près du pas de tir et le vol étant inhabité.

L'incident, dû à un dépassement d'entier dans les registres mémoire des calculateurs électroniques utilisés par le pilote automatique, a provoqué la panne du système de navigation de la fusée, causant de fait sa destruction ainsi que celle de la charge utile. Cette charge utile était constituée des quatre satellites de la mission Cluster, d'une valeur totale de 370 millions de dollars.

2. Pour information la Multiplication

```
          1 0 1 1 0 0 1 0 1
        x             1 0 1 1
  -------------------------------
          1 0 1 1 0 0 1 0 1
    +   1 0 1 1 0 0 1 0 1
    +   0 0 0 0 0 0 0 0 0
    +   1 0 1 1 0 0 1 0 1
  -------------------------------
    1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1
```

3. Pour information la Division

```
  1 1 1 1 0 1 0 | 1 0 1 1
- 1 0 1 1       | -------
  -------       | 1 0 1 1
    1 0 0 0
-   0 0 0 0
  -------
    1 0 0 0 1
-     1 0 1 1
    ---------
      1 1 0 0
-     1 0 1 1
    ---------
      reste : 1
```

4. Représentation binaire des entiers signés

4.1. Méthode du binaire signé

Le bit le plus à gauche dans le mot binaire est utilisé comme indicateur de signe. Il porte alors le poids - 2^r, r étant le rang.

Sur 4 bits :

S	B2	B1	B0

$b_3\ b_2\ b_1\ b_0$ -> $-7 \leq Nbre \leq +7$

Sur 8 bits

S	B6	B5	B4	B3	B2	B1	B0

$b_7\ b_6\ b_5\ b_4$ $b_3\ b_2\ b_1\ b_0$ ->$-127 \leq Nbre \leq +127$

0 => nombre positif
1 => nombre négatif

Avantage si on est renseigné sur la méthode utilisée il est facile d'interpréter le nombre.
Désavantage très pénalisant : le résultat des opérations d'addition (et les autres) est faux.

Ex on pose + 5 + - 5 sur 8 bits
+5 : 0000 0101
+
- 5 : 1000 0101
= : 1000 1010 soit - 10 en suivant la convention

4.2. Méthode du complément à 2

Soit N un nombre entier et $\overline{N}$ son complément alors N + $\overline{N}$ +1 = 0 + le format de N et $\overline{N}$ en 0

Ex $(5)10$ sur 8 bits = (0000 0101) et $\overline{(5)_{10}} = sur\ 8\ bits\ = (1111\ 1010)$ alors N +$\overline{N} =$ $(1\ 0000\ 0000)$ qui dépasse le format de 8 bits donc le premier 1 ne sera pas pris en compte .

Donc N +$\overline{N} + 1 = 0$ pour -N , -N = $\overline{N}$ +1 et on garde le format imposé

- 1er temps : fixer le format le nombre de bits des mots numériques

Si le nombre est positif on l'écrit en binaire « normal »
Sinon on part du binaire du nombre positif puis

- 2ème temps: Complément à 1 : $\bar{1} \Rightarrow 0$ et $\bar{0} \Rightarrow 1$
- 3ème temps: Ajout d'une unité pour obtenir le complément à 2

Ex (-4) 10 en complément à 2 sur 8 bits

5. Représentation binaire des nombres réels

La notation binaire permet la représentation des nombres décimaux.

En notation décimal, les chiffres à gauche de la virgule représentent des unités, des dizaines, centaines etc … et ceux à droite de la virgule, des dixièmes, des centièmes etc..

Ex :

De la même manière en binaire, les chiffre à droite de la virgule représentent de demis, des quarts, des huitièmes, des seizièmes etc …

Ex :

On convertit facilement un nombre binaire en base 10 avec les puissances de 2

Ex :

Pour convertir de la base 10 à la base 2 on utilise la méthode suivante :

Ex On souhaite représenter 5,375 en binaire

1 :

2 : On transforme la partie décimale de la manière suivante :

3 : On assemble les résultats :

Un nombre décimal ayant un nombre fini de chiffre après la virgule peut avoir une représentation binaire avec une infinité de décimal.

Ex On souhaite convertir 0,3 en binaire :

Les nombres tels que 0.1 et 0.3 ne sont pas représentables exactement en binaire. Ils ont une représentation tronquée en machine ce qui introduit des erreurs dans les opérations :

```
>>> 0.2 +0.1
0.30000000000000004
```

6. Notation scientifique

Pour représenter de manière générale les nombres réels on utilise donc une valeur approchée. Cette valeur approchée s'inspire de la notation scientifique.

Ex

En notation scientifique décimale, un nombre est représenté sous la forme : s $\boldsymbol{m}$ x 10^n où :

- s : est le signe du nombre + ou -
- m est un nombre réel tel que $1 \leq m < 10$ il s'appelle la **mantisse**
- n est un entier relatif il s'appelle **l'exposant**

En notation scientifique binaire un nombre est représenté également sous la forme : s $\boldsymbol{m}$ x 2^n où :

- s : est le signe du nombre + ou -
- m est un nombre réel tel que $1 \leq m < 2$ il s'appelle la **mantisse**
- n est un entier relatif il s'appelle **l'exposant**

Cette écriture est appelée virgule flottante car la virgule peut flotter de gauche à droite. Un réel est donc représenté en machine par un nombre décimal d'un type particulier : les nombres flottants (floats).

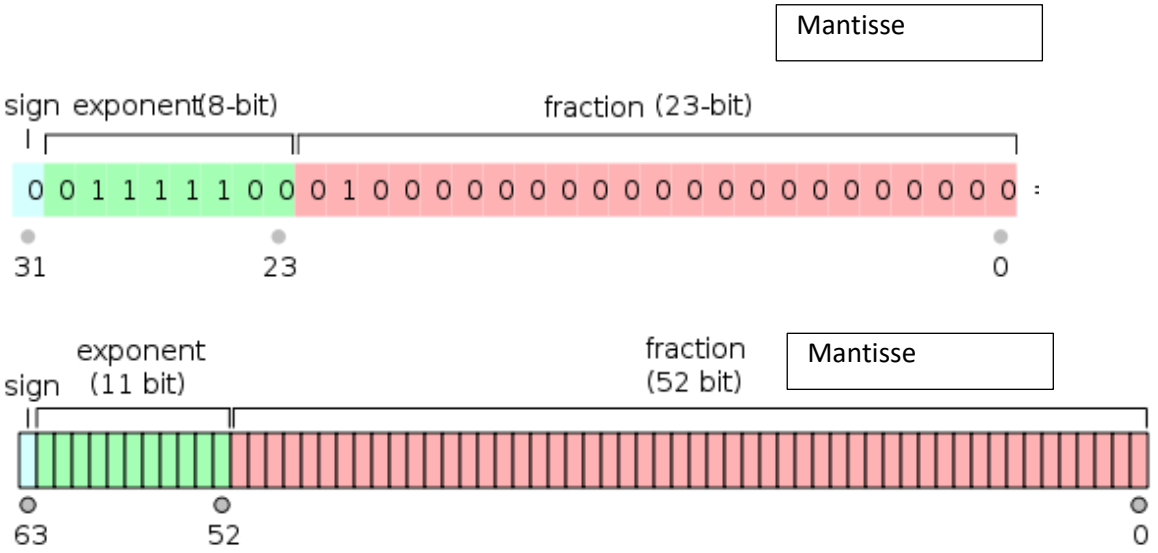
7. Représentation en machine

A la fin des années 70, chaque ordinateur possédait sa propre représentation pour les nombres à virgule flottante. En 1985 la norme IEEE 754 est apparue pour normaliser le codage des nombres.

Il existe deux formats associés à cette norme : le format dit "simple précision" et le format dit "double précision". Le format "simple précision" utilise 32 bits pour écrire un nombre flottant alors que le format "double précision" utilise 64 bits. Dans la suite nous travaillerons principalement sur le format 32 bits.

Que cela soit en simple précision ou en double précision, la norme IEEE754 utilise :

- 1 bit de signe (1 si le nombre est négatif et 0 si le nombre est positif)
- des bits consacrés à l'exposant (8 bits pour la simple précision et 11 bits pour la double précision)
- des bits consacrés à la mantisse (23 bits pour la simple précision et 52 bits pour la double précision)



Nous pouvons vérifier que l'on a bien 1 + 8 + 23 = 32 bits pour la simple précision et 1 + 11 + 52 = 64 bits pour la double précision.

Pour écrire un nombre flottant en respectant la norme IEEE754, il est nécessaire de commencer par écrire le nombre sous la forme 1,XXXXX x 2^e (avec e l'exposant), il faut obligatoirement qu'il y ait un seul chiffre à gauche de la virgule et il faut que ce chiffre soit un "1". Par exemple le nombre "1010,11001" devra être écrit "$1,01011001x2^{11}$". Autre exemple, "0,00001001" devra être écrit "$1,001x2^{-101}$".

La partie "XXXXXX" de "1,XXXXX.2^{e}" constitue la mantisse (dans notre exemple "1010,11001" la mantisse est "01011001"). Comme la mantisse comporte 23 bits en simple précision, il faudra compléter avec le nombre de zéro nécessaire afin d'atteindre les 23 bits (si nous avons "01011001", il faudra ajouter 23 - 8 = 15 zéros à droite, ce qui donnera en fin de compte "01011001000000000000000")

Notre première intuition serait de dire que la partie "exposant" correspond simplement au "e" de "1,XXXXX.2e" (dans notre exemple "1010,11001", nous aurions "11"). En fait, c'est un peu plus compliqué que cela. En effet, comment représenter les exposants négatifs ? Aucun bit pour le signe de l'exposant n'a été prévu dans la norme IEEE754, une autre solution a été choisie :

Pour le format simple précision, 8 bits sont consacrés à l'exposant, il est donc possible de représenter 256 valeurs, nous allons pouvoir représenter des exposants compris entre (-126)10 et (+127)10 (les valeurs -127 et +128 sont des valeurs réservées, nous n'aborderons pas ce sujet ici). Pour avoir des valeurs uniquement positives, il va falloir procéder à un décalage : ajouter systématiquement 127 à la valeur de l'exposant. Prenons tout de suite un exemple (dans la suite, afin de simplifier les choses nous commencerons par écrire les exposants en base 10 avant de les passer en base 2 une fois le décalage effectué) :

Repartons de "1010,11001" qui nous donne 1,01011001.2^{3}, effectuons le décalage en ajoutant 127 à 3 : "1,01011001.2^{130}", soit en passant l'exposant en base 2 : "1,01011001.2^{10000010}". Ce qui nous donne donc pour "1010,11001" une mantisse "01011001000000000000000" (en ajoutant les zéros nécessaires à droite pour avoir 23 bits) et un exposant "10000010" (même si ce n'est pas le cas ici, il peut être nécessaire d'ajouter des zéros pour arriver à 8 bits, ATTENTION, ces zéros devront être rajoutés à gauche).

À noter que pour le format double précision le décalage est de 1023 (il faut systématiquement ajouter 1023 à l'exposant afin d'obtenir uniquement des valeurs positives)

Nous sommes maintenant prêts à écrire notre premier nombre au format simple précision : soit le nombre "-10,125" en base 10 représentons-le au format simple précision :

nous avons (10)10 = (1010)2 et (0,125)10 = (0,001)2 soit (10,125)10 = (1010,001)2

Décalons la virgule : 1010,001 = 1,010001.2^{3}, soit avec le décalage de l'exposant 1,010001.2^{130}, en écrivant l'exposant en base 2, nous obtenons 1,010001.2^{10000010}

Nous avons donc : notre bit de signe = 1 (nombre négatif), nos 8 bits d'exposant = 10000010 et nos 23 bits de mantisse = 01000100000000000000000

Soit en "collant" tous les "morceaux" : 11000001001000100000000000000000

Cette écriture étant un peu pénible, il est possible d'écrire ce nombre en hexadécimal : C1220000

Ex

Déterminez la représentation au format simple précision de (-32,75)10 en binaire et en hexadécimal.

Site faisant la conversion

https://www.binaryconvert.com

2. Représentation des flottants dans un ordinateur : IEEE 754 -> decimal

Il est aussi possible de passer d'une représentation au format IEEE 754 à une représentation "classique" en base 10

Soit le nombre flottant au format simple précision :
01111101000000000000000000000000:

00111111010000000000000000000000,

- bit de signe à 0 : nombre positif
- l'exposant décalé : $(01111101)_2 = (125)_{10}$, soit une fois le décalage supprimé, 125 - 127 = -2.
- la mantisse : les 23 bits suivants sont uniquement des zéros, ce qui nous donne en fin de compte : $1,000.2^{-2}$. Ce qui donne, en base 10 également $(1,000.2^{-2})_{10}$ soit $(0,25)_{10}$.

Ex 5 Déterminez la représentation au format simple précision de (0,1)10 en binaire.

Nous avons ici un problème : comme déjà évoqué plus haut, nous nous retrouvons avec une "conversion" qui ne s'arrête jamais (le schéma "0011" se répète à "l'infini"), problème, en simple précision, la mantisse est limitée à 23 bits.

Vous devriez donc obtenir : 00111101110011001100110011001100

Ex 6 : Soit le nombre flottant au format simple précision : 00111101110011001100110011001100.

Trouvez la représentation en base 10 de ce nombre.

La réponse à la question posée ci-dessus est (0,099999994)10, or, en toute logique, nous devrions trouver (0,1)10. Cette "légère" erreur est logique quand on y réfléchit un peu. N'oubliez qu'à cause de la limitation de la mantisse à 23 bits, nous avons dû "tronquer" notre résultat (de toutes les façons, même avec une mantisse beaucoup plus grande, on aurait aussi eu le problème, car le schéma "0011" se répète à l'infini). Cette représentation avec un nombre limité de bits des nombres flottants est un problème classique en informatique. Cela peut entrainer des erreurs d'arrondi dans les calculs qui peuvent être très gênants si on n'y prend pas garde :

Sources Wikipédia / David Roche / Eduscol